TOPOLOGIA

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

• SFERE

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$ si definiscono:

- sfera aperta o intorno di centro x_0 e raggio ρ

$$B(x_0, \rho) = B_\rho(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho \}$$

- sfera chiusa di centro x_0 e raggio ρ

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \overline{B}_\rho(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \rho \}$$

• PUNTO INTERNO

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto interno ad Ω se:

$$\exists \rho : B_\rho(x_0) \subseteq \Omega$$

ciò non significa necessariamente che $x_0 \in \Omega$.

• PUNTO ESTERNO

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto esterno ad Ω se:

- $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \cap \Omega = \emptyset$
- $B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ (è interno al complemento di Ω)

• Punto di FRONTIERA

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto di FRONTIERA per Ω se:

- $\forall \rho > 0 \quad \Omega \cap B_\rho(x_0) \neq 0 \wedge \Omega^c \cap B_\rho(x_0) \neq 0$
(non è né interno, né esterno)
- $\forall \rho > 0 \quad x_1 \in \Omega, x_2 \notin \Omega : x_1, x_2 \in B_\rho(x_0)$

• PUNTO ISOLATO

Dato $x_0 \in \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto isolato di Ω se:

$$\exists \rho > 0 : B_\rho(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$$

, cioè è l'unico punto dell'intorno di centro x_0 e raggio ρ è x_0.

• PUNTO di ACCUMULAZIONE

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto di accumulazione per Ω o approssimabile da punti di Ω se:

- $\forall \rho > 0 \quad \exists x \in \Omega \cap B_\rho(x_0) : x \neq x_0$
- $\forall \rho > 0 \quad \exists x \in \Omega : x \in B_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$

, cioè comunque presa una sfera di centro x_0 e raggio ρ, esiste almeno un punto x interno alla sfera diverso da x_0.

• NOTAZIONI

- $\mathcal{F}\Omega$ = insieme dei punti di frontiera di Ω
- $\partial\Omega$ = insieme dei punti di accumulazione di Ω

• CONSIDERAZIONI

- I punti interni e di frontiera, sono punti di accumulazione
- I punti esterni non sono punti di accumulazione.

• INSIEME APERTO

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce un insieme aperto se:

$$\forall x \in \Omega \quad \exists \rho > 0 : B_\rho(x) \subseteq \Omega$$

, cioè se ogni punto x dell'insieme Ω è interno.

• INSIEME CHIUSO

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce un insieme chiuso se:

- il suo complementare $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è aperto
- contiene tutti i suoi punti di accumulazione $\partial\Omega \subseteq \Omega$
- contiene tutti i suoi punti di frontiera $\mathcal{F}\Omega \subseteq \Omega$

• INSIEME LIMITATO

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce un insieme limitato se:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \wedge \rho \in \mathbb{R}^+ : \Omega \subseteq B_\rho(x_0)$$

, cioè se esiste una sfera che lo contiene tutto.

Master Copy COPISTERIA 055/8312216 3819837745

• INSIEME CONVESSO

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce un insieme convesso se:

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$$

, cioè scelti due punti qualsiasi x_1, x_2 appartenenti ad Ω, il segmento $\overline{x_1 x_2}$ che li unisce appartiene tutto ad Ω.

• CHIUSURA DI UN INSIEME

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce chiusura dell'insieme Ω, l'insieme $\bar{\Omega}$ formato da Ω stesso e dall'insieme dei suoi punti di accumulazione.

$$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega \Rightarrow \Omega \text{ è chiuso} \iff \bar{\Omega} = \Omega$$

• INSIEME COMPATTO

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce compatto se è un insieme CHIUSO & LIMITATO.

LIMITI & CONTINUITÀ

• STIMA della NORMA con i MODULI DELLE COMPONENTI.

FASTCOPY
Tel. 050/556414

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}$$

$$|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \le \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2} \le \sqrt{n \cdot \max (x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\max (x_i)^2} = \sqrt{n} \cdot \max \sqrt{(x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \max |x_i|$$

$$\Rightarrow |x_i| \le |x| \le \sqrt{n} \cdot \max |x_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

• SUCCESSIONE

Una successione $x_n \in \mathbb{R}^N$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^N$

$$x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$$

• SUCCESSIONE CONVERGENTE

$x_n \in \mathbb{R}^N$ è una successione convergente se:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \; |x_n - x| < \varepsilon$$

si può anche dire che $\lim_{n \to +\infty} |x_n - x| = 0$

$|x_n - x| = a_n \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ perché è una norma, quindi è come avere una successione a_n di Reali.

Se non esiste la norma possiamo usare la distanza $d(x, x_n)$

• SUCCESSIONI DIVERGENTI

$x_n \in \mathbb{R}^N$ è una successione divergente se

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \; |x_n| > \varepsilon$

cioè scelta una sfera qualunque, esiste un $\bar{n}$ per cui la successione sta tutta fuori dalla sfera

Equivale a dire che $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$.

• DIVERGENZA della NORMA

$x_n \in \mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$ almeno una delle sue componenti diverge

$\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$

Dimostrazione:

$|x_n| = \sqrt{(x_n)_1^2 + (x_n)_2^2 + \dots + (x_n)_N^2}$

essendo una somma finita di termini positivi se uno diverge, diverge tutta la somma.

• SUCCESSIONI OSCILLANTI

$x_n \in \mathbb{R}^N$ è una successione oscillante se non converge e non diverge:

$\lim_{n \to +\infty} x_n = N\bar{E}$.

• I PUNTI di ACCUMULAZIONE SONO LIMITI di SUCCESSIONI di PUNTI DISTINTI dell'INSIEME

Dato $x_0 \in \partial\Omega$ allora $\exists x_n \in \Omega : x_n \neq x_m, \; n \neq m$.

Dimostrazione:

Usiamo la definizione di punto di accumulazione
$x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in \Omega : x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$

$x_0 = 0$

ε_1

$\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in \Omega : x_1 \in B_1(x_0) \setminus \{x_0\}$

x_1

$\varepsilon_2 \leq |x_1| \Rightarrow \varepsilon_2 \leq 1/2$

ε_2

x_0 x_2

$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{|x_{n-1}|}{2}\right\}$

ε_3

Sappiamo che $0 \leq |x_n - x| \leq \varepsilon_n \leq 1/n$ quindi $\varepsilon_n \to 0$, perciò un punto di accumulazione può essere approssimato con una successione di punti interni.

In generale, prendiamo $x_1 \in \Omega : |x_1 - x_0| < 1$ e supponiamo di avere $x_1, \dots, x_n$ successione di punti

Scegliamo $x_{n+1} \in \Omega \cap [B_{\varepsilon_{n+1}}(x_0) \setminus \{x_0\}]$ con

$$\varepsilon_{n+1} = \min\left\{\frac{1}{n+1}, \frac{|x_n - x_0|}{2}\right\}$$

• CONSIDERAZIONI

Data $x_n \in \mathbb{R}^N$, $x_n = ((x_n)_1, (x_n)_2, \dots, (x_n)_N)$ → N successioni di numeri Reali

Si ha che $x_n \to 0 \iff (x_n)_i \to 0 \ \forall i = 1, \dots, N$

• FUNZIONE SCALARE E VETTORIALE

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funzione scalare

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funzione vettoriale.

$\forall x \in \Omega$, $f(x) \in \mathbb{R}^m$ $\quad f(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

• CONTINUITÀ di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Data la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f è continua in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \ \ |x - x_0| < \delta \ , \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

• CASO PARTICOLARE delle CURVE e delle SUPERFICIE PARAMETRICHE

- $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curva parametrica tale che

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \text{ con } \alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$\gamma(t)$ continua $\iff$ $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono continue

- Superficie Parametrica

$$\phi(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x(\varphi, \lambda) \\ y(\varphi, \lambda) \\ z(\varphi, \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \phi(\varphi, \lambda) \text{ continua} \\ \Updownarrow \\ x(\varphi, \lambda),\ y(\varphi, \lambda) \text{ e } z(\varphi, \lambda) \\ \text{sono continue} \end{array}$$

Equazione del Piano

$$\sigma(t, s) = x_0 + tu + sv = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

• CURVA PARAMETRICA

Una curva parametrica γ è una funzione

$$\gamma : [a,b] \to \Omega \text{ con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

FASTCOPY
Tel. 050/556414